Voyage en probabilités : percolation et géométrie aléatoire

Guillaume Blanc

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay

π day, Lycée Louis-le-Grand (3.14.2024)

Au programme

1. Percolation par arêtes dans $\mathbb{Z}^d$
2. Percolation de premier passage
3. Géométrie aléatoire avec des processus de Poisson de routes

Brève histoire des probabilités

Théorie mathématique née de la modélisation de phénomènes aléatoires (e.g, jeux de hasard).

Quelques dates clés :

- Correspondance entre Pascal et Fermat autour des problèmes de dés du chevalier de Méré (1654).
- Théorie de la mesure, intégration de Lebesgue (1901).
- Axiomatique de Kolmogorov (1933).

Une façon de définir la discipline : étude des variables aléatoires.

Variables aléatoires

Soit E un ensemble. Une **variable aléatoire** à valeurs dans E est une fonction X d'un ensemble "abstrait" Ω vers E.

Plutôt que de voir X comme la fonction $\omega \in \Omega \mapsto X(\omega)$, on voit X comme un élément "aléatoire" de E, et on considère les probabilités $\mathbb{P}(X \in B)$, pour $B \subset E$.

Conformément à l'intuition, ces nombrent vérifient :

- $\mathbb{P}(X \in B) \in [0,1]$ pour tout $B \subset E$,
- $\mathbb{P}(X \in \varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}(X \in E) = 1$,
- si $B_1, B_2 \subset E$ sont disjoints, alors

$$\mathbb{P}(X \in B_1 \sqcup B_2) = \mathbb{P}(X \in B_1) + \mathbb{P}(X \in B_2).$$

Ils caractérisent la **loi** de X.

Variables aléatoires

Pour travailler avec une variable aléatoire X, on commence par définir sa loi en prescrivant les probabilités $\mathbb{P}(X \in B)$, pour $B \subset E$.

Pour n'importe quelle fonction $\mu : B \subset E \mapsto \mu(B) \in [0,1]$ qui vérifie :

- $\mu(\varnothing) = 0$ et $\mu(E) = 1$,
- si $B_1, B_2 \subset E$ sont disjoints, alors

$$\mu(B_1 \sqcup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2),$$

on peut construire une variable aléatoire X de loi μ, i.e, telle que $\mathbb{P}(X \in B) = \mu(B)$ pour tout $B \subset E$.

Exemple

E est un ensemble fini, et

$$\mu(B) = \frac{\#B}{\#E} \quad \text{pour tout } B \subset E.$$

Si X est une variable aléatoire de loi μ, alors

$$\mathbb{P}(X = x) = \mu\{x\} = \frac{1}{\#E} \quad \text{pour tout } x \in E.$$

On dit que X est de loi **uniforme** sur E.

- Lorsque $E = \{1, \ldots, 6\}$, on peut penser à X comme le résultat d'un tirage de dé.
- Lorsque $E = \{0, 1\}$, on peut penser à X comme le résultat d'un tirage à pile ou face.

Exemple

$E = \{0,1\}$, et

$$\mu(\varnothing) = 0, \quad \mu\{1\} = p, \quad \mu\{0\} = 1 - p, \quad \text{et} \quad \mu\{0,1\} = 1,$$

où $p \in [0,1]$ est un paramètre.

Si X est une variable aléatoire de loi μ, alors

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mu\{1\} = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = \mu\{0\} = 1 - p.$$

On dit que X est de loi de Bernoulli de paramètre p.
On peut penser à X comme le résultat d'un tirage à pile ou face, avec une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p, et sur face avec probabilité $1 - p$. (Lorsque $p = 1/2$, on retrouve l'exemple précédent.)

Indépendance

E est un ensemble fini, et

$$\mu(B) = \frac{\#B}{\#E^2} \quad \text{pour tout } B \subset E^2 = \{(x_1, x_2)\,;\, x_1, x_2 \in E\}.$$

Si (X_1, X_2) est une variable aléatoire de loi μ, alors pour tous $B_1, B_2 \subset E$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in B_1\,;\, X_2 \in B_2) &= \mathbb{P}((X_1, X_2) \in B_1 \times B_2)\\ &= \mu(B_1 \times B_2)\\ &= \frac{\#B_1 \cdot \#B_2}{\#E^2} = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in B_2).\end{aligned}$$

On dit que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont **indépendantes**.

Suites de variables aléatoires indépendantes

Pour n'importe quelle fonction $\mu : B \subset E \mapsto \mu(B) \in [0,1]$ qui vérifie :

- $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(E) = 1$,
- Si $B_1, B_2 \subset E$ sont disjoints, alors

$$\mu(B_1 \sqcup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2),$$

on peut construire une suite $(X_1, X_2, \dots)$ de variables aléatoires **indépendantes** de loi μ, i.e, telles que $\mathbb{P}(X_n \in B) = \mu(B)$ pour tout $B \subset E$. On a alors, pour tous $B_1, \dots, B_n \subset E$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \in B_1 ; \dots ; X_n \in B_n) &= \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in B_n) \\ &= \mu(B_1) \cdot \ldots \cdot \mu(B_n). \end{aligned}$$

Exemple

$E = \{0,1\}$, et

$$\mu(\varnothing) = 0, \quad \mu\{1\} = p, \quad \mu\{0\} = 1 - p, \quad \text{et} \quad \mu\{0,1\} = 1,$$

où $p \in [0,1]$ est un paramètre.

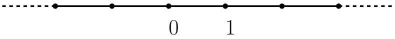
Si $(X_1, X_2, \dots)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ, i.e, de loi de Bernoulli de paramètre p, alors on peut penser à $(X_1, X_2, \dots)$ comme le résultat d'une infinité de tirages à pile ou face, avec une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p, et sur face avec probabilité $1 - p$. On a, par exemple :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1\,;\,\dots\,;\,X_n = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= p \cdot \ldots \cdot p = p^n. \end{aligned}$$

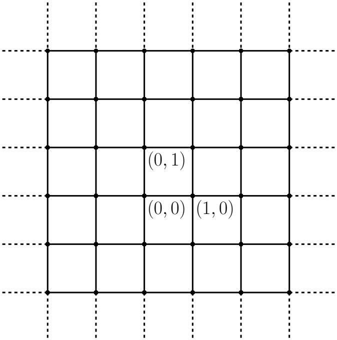
Des questions ?

Le modèle

On se place sur le **réseau hypercubique** $\mathbb{Z}^d$, où $d \in \mathbb{N}^*$.



$\mathbb{Z}$



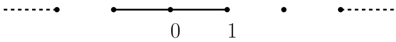
$\mathbb{Z}^2$

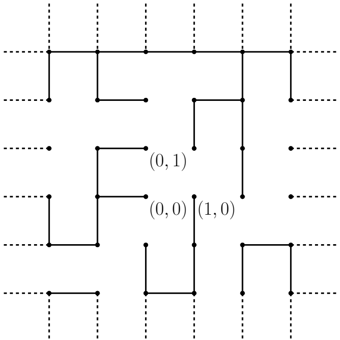
Le modèle

Pour chaque arête e de $\mathbb{Z}^d$, on garde e avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1 - p$, où $p \in [0, 1]$ est un paramètre du modèle, et ce indépendamment des autres arêtes.

Le modèle

Pour chaque arête e de $\mathbb{Z}^d$, on garde e avec probabilité p, et on l'enlève avec probabilité $1 - p$, où $p \in [0,1]$ est un paramètre du modèle, et ce indépendamment des autres arêtes.





Le modèle

Formellement, on se donne une famille $\left(X_e,\, e \text{ arête de } \mathbb{Z}^d\right)$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$, de loi donnée par

$$\mathbb{P}_p(X_e = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_p(X_e = 0) = 1 - p.$$

Pour chaque arête e de $\mathbb{Z}^d$, on garde e si $X_e = 1$, et on l'enlève si $X_e = 0$.

Le modèle

Formellement, on se donne une famille $\left(X_e,\, e \text{ arête de } \mathbb{Z}^d\right)$ de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$, de loi donnée par

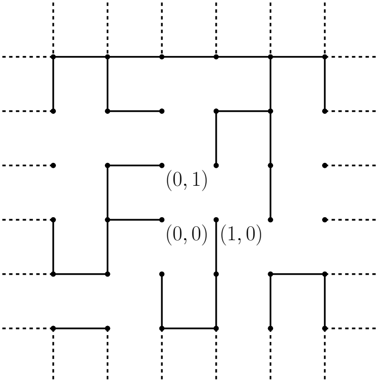
$$\mathbb{P}_p(X_e = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_p(X_e = 0) = 1 - p.$$

Pour chaque arête e de $\mathbb{Z}^d$, on garde e si $X_e = 1$, et on l'enlève si $X_e = 0$.

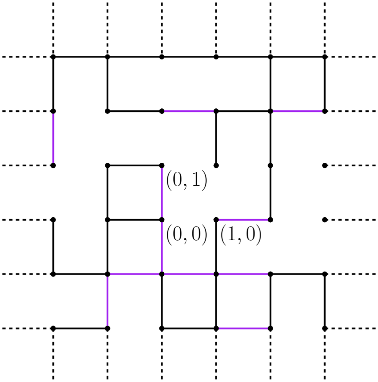
Modèle introduit par Broadbent et Hammersley en 1957.

La question

Intuitivement, plus p est grand, plus la composante connexe de l'origine a de chances d'être grande.



$p = 1/2$



$p = 2/3$

Le modèle

Questions(s) : en fonction du paramètre p, existe-t-il une composante connexe **infinie** ?

Le modèle

Questions(s) : en fonction du paramètre p, existe-t-il une composante connexe **infinie** ? Quelle est la probabilité

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$$

que la composante connexe de l'origine soit infinie ?

Le modèle

Questions(s) : en fonction du paramètre p, existe-t-il une composante connexe **infinie** ? Quelle est la probabilité

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$$

que la composante connexe de l'origine soit infinie ?

Proposition

Pour tout $p \in [0,1]$, on a

$$\mathbb{P}_p\,(\text{il existe une composante connexe infinie}) \in \{0,1\}.$$

De plus,

$$\mathbb{P}_p\,(\text{il existe une composante connexe infinie}) = 1 \iff \theta(p) > 0.$$

Paramètre critique et transition de phase

La fonction $\theta : p \in [0,1] \mapsto \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$ est croissante, et on a

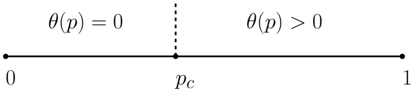
$$\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(1) = 1.$$

Paramètre critique et transition de phase

La fonction $\theta : p \in [0,1] \mapsto \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)$ est croissante, et on a

$$\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(1) = 1.$$

On a donc le diagramme suivant :



où

$$p_c = \inf\{p \in [0,1] : \theta(p) > 0\}.$$

est le paramètre **critique**. On dit que le modèle présente une **transition de phase** lorsque $p_c \in]0,1[$.

Le cas $d = 1$

Proposition

Lorsque $d = 1$, on a $p_c = 1$. On a donc, pour tout $p \in [0, 1[$,

$$\mathbb{P}_p(\text{il existe une composante connexe infinie}) = 0.$$

Le cas $d = 1$

Proposition

Lorsque $d = 1$, on a $p_c = 1$. On a donc, pour tout $p \in [0, 1[$,

$$\mathbb{P}_p(\text{il existe une composante connexe infinie}) = 0.$$

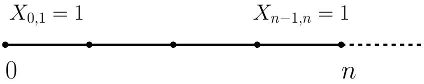
Idée.

Soit $p \in [0, 1[$. Montrons que $\theta(p) = 0$. On a

$$\begin{aligned}\theta(p) &= \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty)\\ &\leq \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n) + \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow -n)\\ &= 2 \cdot \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n),\end{aligned}$$

et ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

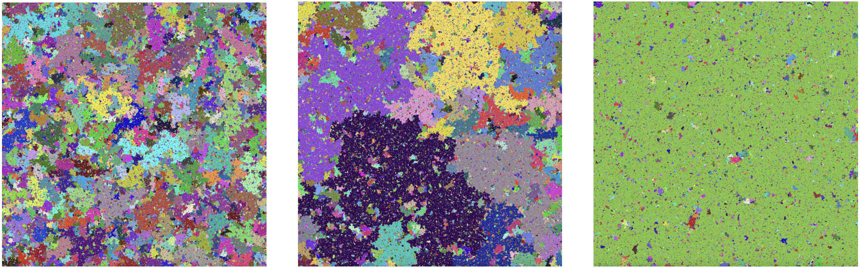
Le cas $d = 1$



$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow n) &= \mathbb{P}(X_{0,1} = 1\,;\,\dots\,;\,X_{n-1,n} = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_{0,1} = 1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_{n-1,n} = 1) \\
&= p \cdot \ldots \cdot p \\
&= p^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

On a donc $\theta(p) = 0$. $\square$

Simulations en dimension $d = 2$



$p = 0.49$ $\quad$ $p = 0.5$ $\quad$ $p = 0.51$

Le résultat

Théorème

Lorsque $d \geq 2$*, on a* $p_c \in]0,1[$*. On a donc :*

- *pour tout* $p \in [0, p_c[$,

$$\mathbb{P}_p(\textit{il existe une composante connexe infinie}) = 0,$$

- *pour tout* $p \in]p_c, 1]$,

$$\mathbb{P}_p(\textit{il existe une composante connexe infinie}) = 1.$$

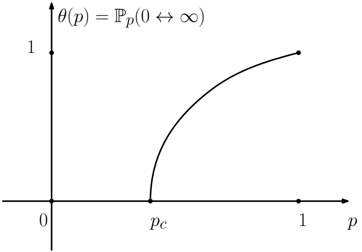
On peut même montrer que pour tout $p \in [0,1]$, on a

$$\mathbb{P}_p(\text{il existe au moins deux composantes connexes infinies}) = 0.$$

La grosse question

Théorème

Lorsque $d = 2$, on a $p_c = 1/2$, et $\theta(1/2) = 0$.



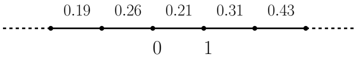
Lorsque $d \geq 3$, on ne sait pas calculer p_c. On conjecture que $\theta(p_c) = 0$, mais on ne sait pas le démontrer pour $d = 3$.

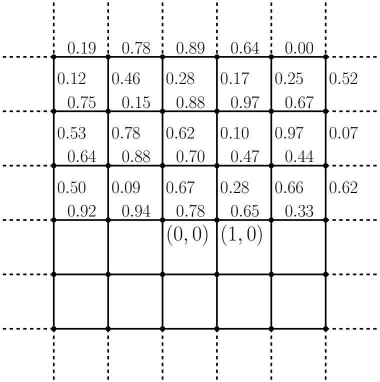
Le modèle

À chaque arête e de $\mathbb{Z}^d$, on attribue un **temps de passage** aléatoire $T_e \in [0, \infty]$, et ce indépendamment des autres arêtes.

Le modèle

À chaque arête e de $\mathbb{Z}^d$, on attribue un **temps de passage** aléatoire $T_e \in [0, \infty]$, et ce indépendamment des autres arêtes.

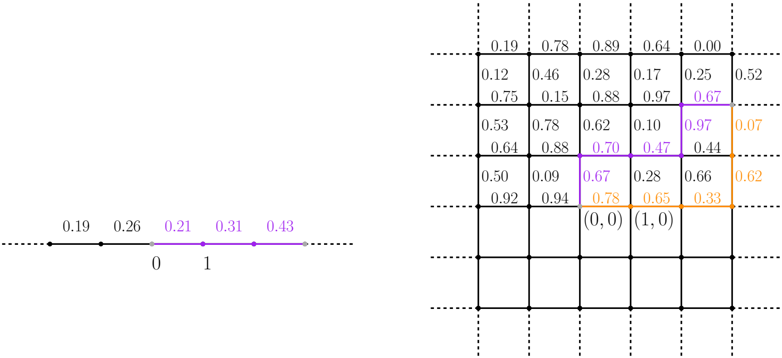




Le modèle

À chaque chemin $\gamma = (e_1, \ldots, e_n)$, on attribue le temps de trajet

$$T(\gamma) = T_{e_1} + \ldots + T_{e_n}.$$



Le modèle

Pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$T(x,y) = \inf_{\gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y} T(\gamma).$$

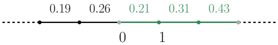
Intuitivement, c'est le temps de trajet optimal de x à y.

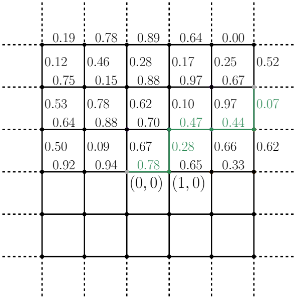
Le modèle

Pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$T(x,y) = \inf_{\gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y} T(\gamma).$$

Intuitivement, c'est le temps de trajet optimal de x à y.





Le modèle

Modèle introduit par Hammersley et Welsh en 1965.

Le modèle

Modèle introduit par Hammersley et Welsh en 1965.

Question(s) : à quoi ressemble

$$\left\{x \in \mathbb{Z}^d : T(0,x) \leq t\right\}$$

pour t grand ?

Le modèle

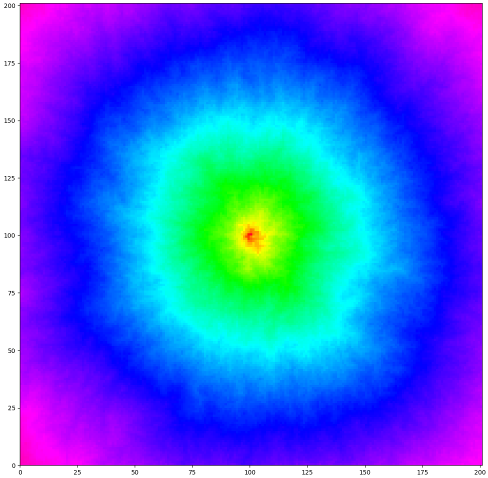
Modèle introduit par Hammersley et Welsh en 1965.

Question(s) : à quoi ressemble

$$\left\{x \in \mathbb{Z}^d : T(0,x) \leq t\right\}$$

pour t grand ? Comment se comporte $T(0, ne_1)$ pour n grand, où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$?

Simulation en dimension $d = 2$



Le cas $d = 1$

Proposition

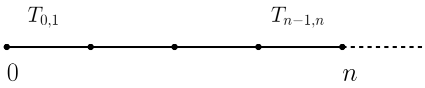
Lorsque $d = 1$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{T(0,n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[T_e]\right) = 1,$$

où $\mathbb{E}[T_e]$ est l'**espérance** de la variable aléatoire T_e.

Le cas $d = 1$

Idée.



On a

$$\frac{T(0,n)}{n} = \frac{T_{0,1} + \ldots + T_{n-1,n}}{n},$$

où les variables aléatoires $T_{0,1}, \ldots, T_{n-1,n}$ sont indépendantes et de même loi que T_e. Le résultat découle de la **loi des grands nombres**. $\square$

Le résultat

Théorème

Lorsque $d \geq 2$, *il existe une constante* $\gamma \in [0, \mathbb{E}[T_e]]$ *telle que*

$$\mathbb{P}\left(\frac{T(0, ne_1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma\right) = 1.$$

Le résultat

Théorème

Lorsque $d \geq 2$, il existe une constante $\gamma \in [0, \mathbb{E}[T_e]]$ telle que

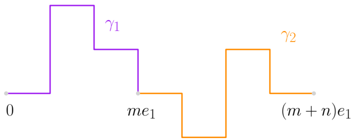
$$\mathbb{P}\left(\frac{T(0, ne_1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma\right) = 1.$$

Idée.

Le résultat découle de la propriété de **sous-additivité** suivante : pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$T(0, (m+n)e_1) \leq T(0, me_1) + T(me_1, (m+n)e_1).$$

Sous-additivité



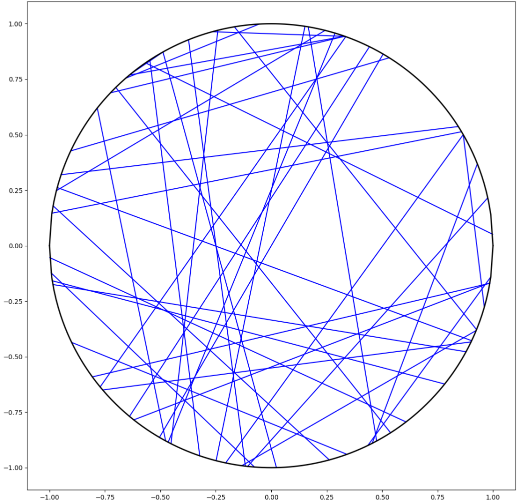
Pour tous chemins γ_1 de 0 à me_1 et γ_2 de me_1 à $(m+n)e_1$, on a

$$T(0,(m+n)e_1) \leq T(\gamma_1) + T(\gamma_2).$$

On en déduit que

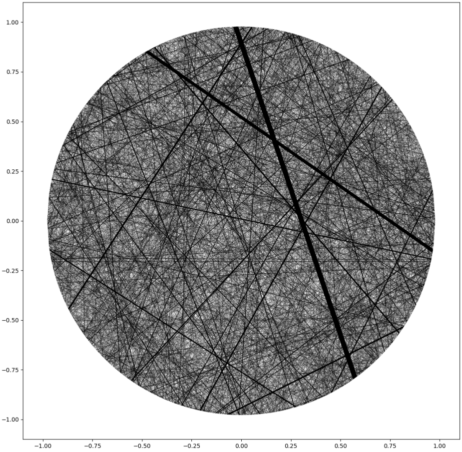
$$T(0,(m+n)e_1) \leq T(0,me_1) + T(me_1,(m+n)e_1).$$

Processus de Poisson de droites



Processus de Poisson de routes

Une route est un couple (ℓ, v), où $\ell \subset \mathbb{R}^d$ est une droite (affine), et $v \in \mathbb{R}_+^*$ est la limitation de vitesse sur ℓ.



Le modèle

On se donne un processus de Poisson de routes dans $\mathbb{R}^d$.

Le modèle

On se donne un processus de Poisson de routes dans $\mathbb{R}^d$.

On roule sur le réseau de routes aléatoire engendré par le processus, en respectant les limitations de vitesse : à chaque chemin γ, on associe son temps de trajet $T(\gamma)$.

Le modèle

On se donne un processus de Poisson de routes dans $\mathbb{R}^d$.

On roule sur le réseau de routes aléatoire engendré par le processus, en respectant les limitations de vitesse : à chaque chemin γ, on associe son temps de trajet $T(\gamma)$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note

$$T(x,y) = \inf_{\gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y} T(\gamma).$$

Intuitivement, c'est le temps de trajet optimal de x à y.

Le modèle

On se donne un processus de Poisson de routes dans $\mathbb{R}^d$.

On roule sur le réseau de routes aléatoire engendré par le processus, en respectant les limitations de vitesse : à chaque chemin γ, on associe son temps de trajet $T(\gamma)$.

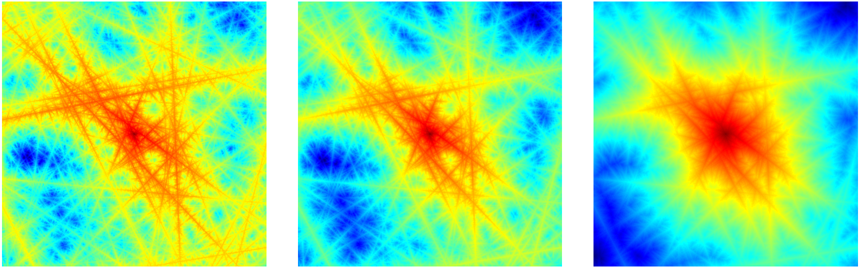
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on note

$$T(x,y) = \inf_{\gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y} T(\gamma).$$

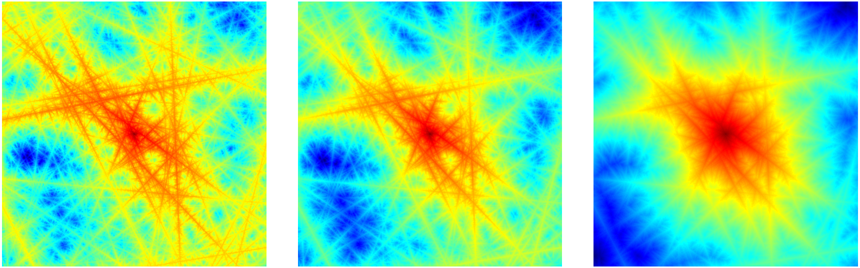
Intuitivement, c'est le temps de trajet optimal de x à y.

Modèle introduit par Aldous en 2012.

Simulations en dimension $d = 2$



Simulations en dimension $d = 2$



Merci de votre attention !